FINANCES PUBLIQUES

CONCOURS EXTERNE POUR L'ACCÈS AU GRADE
D'INSPECTEUR DES FINANCES PUBLIQUES

ANNÉE 2021

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2

Durée : 3 heures – Coefficient : 5

Mathématiques

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

Recommandations importantes

Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.

Sous peine d'annulation, en dehors du volet rabattable d'en-tête, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tels que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro ou toute autre indication, même fictive, étrangère au traitement du sujet.

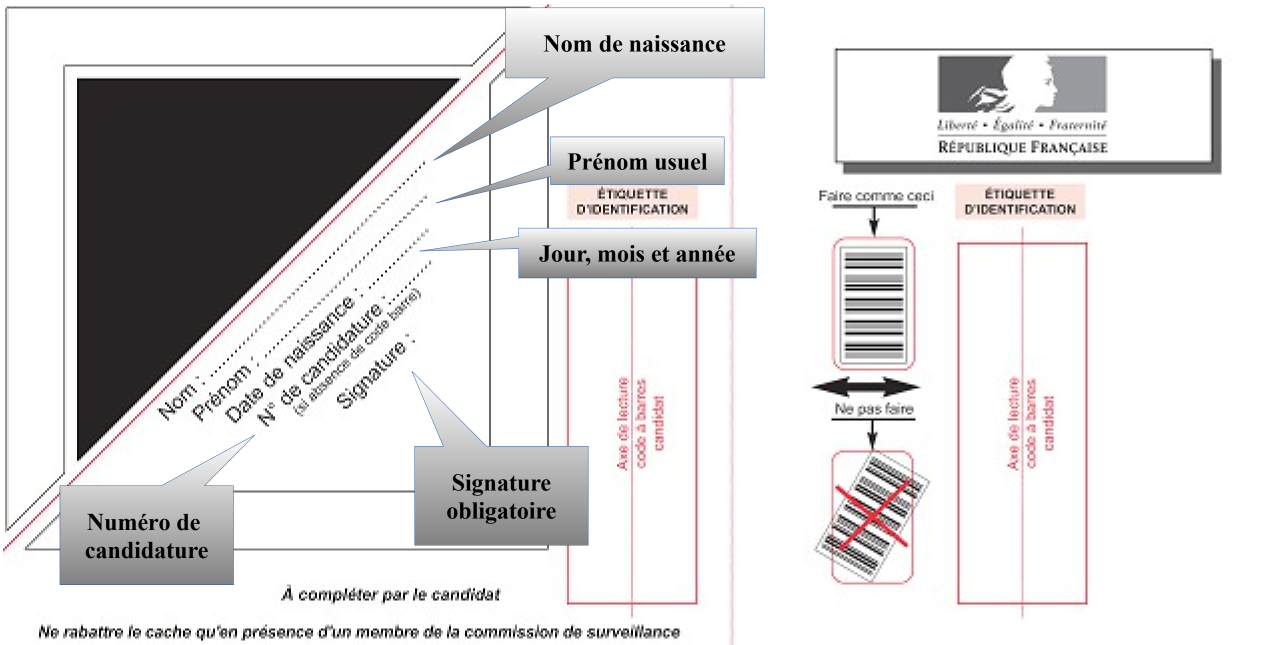
Sur les copies, les candidats devront écrire et souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre de couleur noire ou bleue uniquement. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté
Égalité
Fraternité

Tournez la page S.V.P.

Le candidat complétera l'intérieur du volet rabattable des informations demandées et se conformera aux instructions données



Concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel (1)

(1) Rayer les mentions inutiles

Externe

Pour l'emploi de : **Inspecteur des Finances publiques**

Épreuve n° : **2**

Matière **030 – Mathématiques**

Date : **1 5 0 9 2 0 2 0**

Nombre d'intercalaires supplémentaires :

Préciser éventuellement le nombre d'intercalaires supplémentaires

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement. Une autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Les étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

Suivre les instructions données pour les étiquettes d'identification

NOTE / 20

RÉSERVÉ À L'ADMINISTRATION

À L'ATTENTION DU CORRECTEUR

Pour remplir ce document :

Utilisez un stylo ou une pointe feutre de couleur NOIRE ou BLEUE.

EXEMPLE DE MARQUAGE : Faire comme ceci / Ne pas faire

Pour porter votre note, cochez les gélules correspondantes.

Reportez la note dans les zones **NOTE / 20** et dans le cadre **A**

En cas d'erreur de codification dans le report des notes cochez la case **erreur** et reportez la note dans le cadre **B**.

Cadre A réservé à la notation			Cadre B réservé à la notation rectificative		
20	19	18	20	19	18
17	16	15	17	16	15
14	13	12	14	13	12
11	10	09	11	10	09
08	07	06	08	07	06
05	04	03	05	04	03
02	01	00	02	01	00

Décimales : ,00 ,25 ,50 ,75 — Décimales : ,00 ,25 ,50 ,75 Erreur

NOTE / 20

EN AUCUN CAS, LE CANDIDAT NE FERMERA LE VOLET RABATTABLE AVANT D'Y AVOIR ÉTÉ AUTORISÉ PAR LA COMMISSION DE SURVEILLANCE

FINANCES PUBLIQUES

SUJET

MATHÉMATIQUES

Code matière : 030

Les candidates et les candidats peuvent avoir à leur disposition sur la table de concours le matériel d'écriture, une règle, un correcteur, des surligneurs et le matériel spécifique cité ci-après.

Les matériels autorisés sont les suivants :

- *les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;*
- *les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen ».*
- *les règles graduées, les équerres et les compas.*

Le candidat traitera obligatoirement les cinq exercices suivants.

EXERCICE N° 1

Cet exercice se propose de calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ (***Intégrale de Gauss***) de deux méthodes différentes.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes :

<u>Partie I : Première méthode</u>

1) Montrer que l'intégrale de la fonction f : $t \to e^{-t^2}$ est convergente sur [0, +∞[.

2) On considère les fonctions F et G définies sur [0, +∞[par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right) \times \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right) \quad , \quad G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{t^2+1}dt$$

Montrer que F et G sont C[1] sur [0, +∞[et calculer les dérivées de F et G.

3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, F ' (x) + G ' (x) = 0, et en déduire la valeur de F (x) + G (x).

4) a) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0$ (on pourra encadrer utilement $\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{t^2+1}$ pour tout $t \in [0,1]$).

b) En déduire $\lim_{x \to +\infty} F(x)$, ainsi que la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Partie II : Deuxième méthode

1) Soit $L \in \mathbb{R}^+$. On définit D(L) = { $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, x^2+y^2 \leq L^2$ }.

On considère I(L) = $\iint_{D(L)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$.

En utilisant un changement de variables en coordonnées polaires, démontrer que :

$$I(L) = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-L^2}\right)$$

2) Soit $L \in \mathbb{R}^+$. On définit le carré G(L) = $[0,L] \times [0,L]$.

On pose K(L) = $\iint_{G(L)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$. **Exprimer K(L) en fonction de F(L).**

Rappel : $F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right) \times \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)$

3) Montrer que : $\forall L \in \mathbb{R}^+, I(L) \leq K(L) \leq I(\sqrt{2}L)$ **.**

4) En déduire que K(L) admet une limite lorsque L tend vers +∞ et calculer cette limite.

5) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ **.**

EXERCICE N° 2

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 dans $\mathbb{R}$.
Soit M une matrice de $M_3(\mathbb{R})$
Une matrice $R \in M_3(\mathbb{R})$ est une **racine carrée** de M si et seulement si : $R^2 = M$

1) Soit C une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ telle que : $C = \begin{bmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

a) Déterminer le polynôme caractéristique de C.

b) Justifier l'existence d'une matrice P de $M_3(\mathbb{R})$ telle que : $C = PDP^{-1}$, avec D une matrice diagonale de $M_3(\mathbb{R})$, et déterminer les coefficients de D.
(On pourra notamment écrire D en ordonnant ses coefficients diagonaux du plus petit au plus grand).

2) Montrer que R est une racine carrée de C, si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.

EXERCICE N° 3

On considère la fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2\pi-$périodique , paire, telle que :

$$f(t)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si} \quad t = \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \end{cases}$$

On rappelle que, pour une fonction f $T-périodique$ à valeurs réelles continue par morceaux, la série

$$a_0(f)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)+b_n(f)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\right]$$

avec $a_n(f)=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt$, $b_n(f)=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt$ et

$a_0(f)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$ s'appelle **la série de Fourier** de la fonction f en t.

1) Après avoir vérifié que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

2) Étudier la convergence de la série de Fourier de f et calculer la somme de la série de Fourier de f.

3) En déduire les sommes des séries suivantes :

a) $S_1=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}$

b) $S_2=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$

EXERCICE N° 4

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les deux droites (D_1) et (D_2) suivantes :

(D_1) $\begin{cases} x-z-\alpha=0 \\ y+3z+1=0 \end{cases}$ (D_2) $\begin{cases} x+2y+z-2\beta=0 \\ 3x+3y+2z-7=0 \end{cases}$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

1) a) Les droites (D_1) et (D_2) sont-elles parallèles ?

b) Déterminer une condition sur (α,β) pour que (D_1) et (D_2) soient concourantes.

c) On suppose que (D_1) et (D_2) sont concourantes.
Déterminer en fonction de α l'équation du plan (P) formé par (D_1) et (D_2).

2) On pose $\alpha=\beta=2$.

En trouvant pour chacune des droites (D_1) et (D_2) un vecteur directeur et un point de la droite, déterminer les représentations paramétriques de (D_1) et (D_2).

EXERCICE N° 5

Cinq garçons et trois filles s'assoient sur un banc.

1) Quel est le nombre de dispositions possibles ?

2) Même question si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre.

3) Même question si chaque fille est assise entre deux garçons.