J. 19 1720

DIRECTION GÉNÉRALE DES FINANCES PUBLIQUES

CONCOURS EXTERNE POUR L'ACCÈS AU GRADE D'INSPECTEUR DES FINANCES PUBLIQUES

ANNÉE 2020

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2

Durée : 3 heures - Coefficient : 5

Mathématiques

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

Recommandations importantes
Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.
Sous peine d'annulation de sa copie, le candidat ne doit porter aucun signe distinctif (nom, prénom, signature, numéro de candidature, etc.) en dehors du volet rabattable d'en-tête.
Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ACTION ET DES COMPTES PUBLICS

Tournez la page S.V.P.

Le candidat devra compléter l'intérieur du volet rabattable des informations demandées et se conformer aux instructions données

Nom de naissance

Prénom usuel

Jour, mois et année

Numéro de candidature

Signature obligatoire

Nom : ....

Prénom : ....

Date de naissance : ....

N° de candidature : ....
(si absence de code barre)

Signature :

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Faire comme ceci

Ne pas faire

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

À compléter par le candidat

Ne rabattre le cache qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance

Concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel [1]
[1] Rayer les mentions inutiles

Externe

Pour l'emploi de : Inspecteur des Finances publiques

Épreuve n° : 2

Matière : 030 – Mathématiques

Date : 1 7 0 9 2 0 1 9

Nombre d'intercalaires supplémentaires :

Préciser éventuellement le nombre d'intercalaires supplémentaires

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement. Une autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Les étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

Suivre les instructions données pour les étiquettes d'identification

NOTE / 20
,

RÉSERVÉ À L'ADMINISTRATION

À L'ATTENTION DU CORRECTEUR

Pour remplir ce document :

Utilisez un stylo ou une pointe feutre de couleur NOIRE ou BLEUE.

EXEMPLE DE MARQUAGE : Faire comme ceci — Ne pas faire

Pour porter votre note, cochez les gélules correspondantes.

Reportez la note dans les zones **NOTE / 20** et dans le cadre **A**

En cas d'erreur de codification dans le report des notes cochez la case **erreur** et reportez la note dans le cadre **B**.

Cadre **A** réservé à la notation

20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales

,00	,25	,50	,75

Cadre **B** réservé à la notation rectificative

20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales

,00	,25	,50	,75

Erreur

NOTE / 20
,

N°140 - IMPRIMERIE NATIONALE 2014 01 51061 PO - Juin 2014 - 145 112

EN AUCUN CAS, LE CANDIDAT NE FERMERA LE VOLET RABATTABLE AVANT D'Y AVOIR ÉTÉ AUTORISÉ PAR LA COMMISSION DE SURVEILLANCE

DIRECTION GÉNÉRALE DES FINANCES PUBLIQUES

SUJET

MATHÉMATIQUES

Code matière : 030

Les candidats sont autorisés à utiliser les matériels suivants :

- les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;

- les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen » ;

- les règles graduées et les équerres.

Sont interdits :

- les téléphones portables ainsi que les montres et/ou tout autres objets et accessoires connectés ;

- l'utilisation de tout autre document ou matériel autre que le matériel nécessaire pour composer.

Le candidat traitera obligatoirement les cinq exercices suivants.

EXERCICE N° 1

Autour de la suite de Fibonacci :

On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par : $U_0=0, U_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+2}=U_{n+1}+U_n$

I) 1) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ diverge vers + ∞

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $U_{n+1}^2-U_nU_{n+2}=(-1)^n$

3) En déduire que pour tout entier $n>0$: $\dfrac{(-1)^n}{U_nU_{n+1}}=\dfrac{U_{n+1}}{U_n}-\dfrac{U_{n+2}}{U_{n+1}}$

4) a) Exprimer U_n en fonction de n

b) En déduire que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{U_nU_{n+1}}$, $n>0$, converge puis calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{U_nU_{n+1}}$

II) 1) Montrer que pour tout entier $n>0$, U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.

Rappelons que pour tous entiers a > b, strictement positifs : pgcd (a,b) = pgcd (b;a-b).

Tournez la page S.V.P.

2) a) Soit p un entier strictement positif, montrer que pour tout entier $n>0$ on a :

$U_{n+p}=U_p U_{n+1}+U_{p-1}U_n$

b) En déduire que : pgcd (U_n , U_p) = pgcd (U_{n+p} , U_p).

EXERCICE N° 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle]-1,1[par $f(x)=\dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

1) Montrer que f est développable en série entière sur l'intervalle]-1,1[

2) Démontrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y'-xy=1$

3) En déduire le développement en série entière de f sur l'intervalle]-1,1[

EXERCICE N° 3

On considère l'ensemble suivant noté $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{\ a+b\sqrt{2}\ ,\ a,b\in\mathbb{Z}\ \}$$

1) Montrer que ($\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$,+,×) est un sous anneau de $\mathbb{R}$

2) On considère f l'application de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ définie par :

$f(a+b\sqrt{2}) = a-b\sqrt{2}$

Montrer que f est un morphisme bijectif de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

3) On définit l'application g pour tout $x\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, par $g(x) = xf(x)$

a) Montrer que g est à valeur dans $\mathbb{Z}$

b) Montrer que g est un morphisme pour la loi ×

4) Soit x un élément de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Montrer que x est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si et seulement si $g(x)=\pm 1$

5) Donner un exemple d'élément inversible de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

EXERCICE N° 4

I) 1) Calculer $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$ **puis** $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$

2) On considère Z= $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ **, déterminer sous forme algébrique les racines carrées de Z, en simplifiant les expressions obtenues à l'aide de 1)**

3) En déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$

II) Soit f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'= $e^{\frac{i\pi}{6}}.\bar{z}$

1) Exprimer les coordonnées (x',y') de M' en fonction des coordonnées (x,y) de M

2) Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que $f(M)=M$ **est une droite (D) passant par l'origine du plan dont on donnera une équation cartésienne et dont on déterminera l'angle avec la demi-droite [Ox)**

3) Justifier que pour tout point M du plan et M' son image par f **, le milieu H de [MM'] appartient à (D)**

4) Soit M un point du plan n'appartenant pas à (D) et M' son image par f

a) Déterminer la pente de la droite (D') passant par M et M'

b) Montrer que cette pente ne dépend pas de M et M'

c) Démontrer que (D) et (D') sont perpendiculaires

5) En déduire la nature de l'application f

EXERCICE N° 5

En détaillant les étapes de votre raisonnement, calculer $I=\int_0^{\pi} \frac{(\sin^2(x)-1)\sin(x)}{(\cos(x)-2)(\cos(x)-3)^2}\,dx$

IMPRIMERIE NATIONALE – D'après documents fournis