DIRECTION GÉNÉRALE DES FINANCES PUBLIQUES

CONCOURS EXTERNE POUR L'ACCÈS AU GRADE D'INSPECTEUR DES FINANCES PUBLIQUES

ANNÉE 2019

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2

Durée : 3 heures - Coefficient : 5

Mathématiques

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

Recommandations importantes

Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.

Sous peine d'annulation de sa copie, le candidat ne doit porter aucun signe distinctif (nom, prénom, signature, numéro de candidature, etc.) en dehors du volet rabattable d'en-tête.

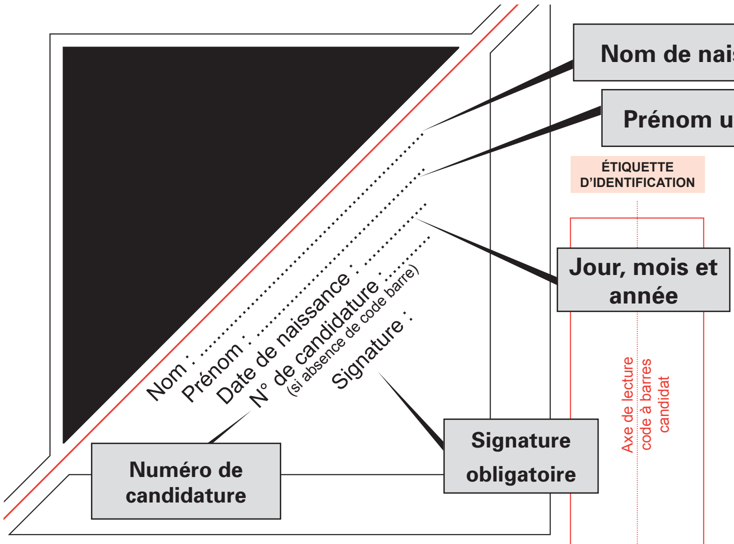
Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ACTION ET DES COMPTES PUBLICS

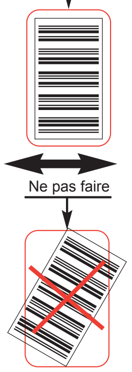
Tournez la page S.V.P

Le candidat devra compléter l'intérieur du volet rabattable des informations demandées et se conformer aux instructions données



Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Faire comme ceci



Ne pas faire

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

À compléter par le candidat

Ne rabattre le cache qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance

Concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel (1)
(1) Rayer les mentions inutiles

Externe
....

Pour l'emploi de : Inspecteur des Finances publiques

Épreuve n° : 2

Matière : 030 – Mathématiques

Date : 1 8 0 9 2 0 1 8

Nombre d'intercalaires supplémentaires :

Préciser éventuellement le nombre d'intercalaires supplémentaires

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement. Une autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Les étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

Suivre les instructions données pour les étiquettes d'identification

NOTE / 20
|__|__|, |__|__|

RÉSERVÉ À L'ADMINISTRATION

À L'ATTENTION DU CORRECTEUR

Pour remplir ce document :

Utilisez un stylo ou une pointe feutre de couleur NOIRE ou BLEUE.

EXEMPLE DE MARQUAGE : Faire comme ceci — Ne pas faire

Pour porter votre note, cochez les gélules correspondantes.

Reportez la note dans les zones **NOTE / 20** et dans le cadre **A**

En cas d'erreur de codification dans le report des notes cochez la case **erreur** et reportez la note dans le cadre **B**.

Cadre **A** réservé à la notation

20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales

,00	,25	,50	,75

Cadre **B** réservé à la notation rectificative

20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales

,00	,25	,50	,75

Erreur

NOTE / 20
|__|__|, |__|__|

N°140 - IMPRIMERIE NATIONALE 2014 01 51061 PO - Juin 2014 - 145 112

EN AUCUN CAS, LE CANDIDAT NE FERMERA LE VOLET RABATTABLE AVANT D'Y AVOIR ÉTÉ AUTORISÉ PAR LA COMMISSION DE SURVEILLANCE

DIRECTION GÉNÉRALE DES FINANCES PUBLIQUES

SUJET

MATHÉMATIQUES

Code matière : 030

Les candidats sont autorisés à utiliser les matériels suivants :

- les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;

- les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen ».

Sont interdits :

- les téléphones portables ainsi que les montres et/ou tout autres objets et accessoires connectés ;

- l'utilisation de tout autre document ou matériel autre que le matériel nécessaire pour composer.

Le candidat traitera obligatoirement les quatre exercices suivants.

EXERCICE N° 1

Soit f une fonction continue de [0,1] dans [0,1].

1) Montrez que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un réel a de [0,1], tel que $f(a) = a$.

2) Le point fixe de f est-il nécessairement unique ? Justifiez.

EXERCICE N° 2

On note E , l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $B_E = (1,X,X^2)$ la base canonique de E.

Pour tout polynôme P de E, on note indifféremment P ou $P(X)$.

On note P' la dérivée de P et P'' la dérivée seconde de P.

On note, pour tout polynôme P de E :
$a(P) = P - XP'$, $b(P) = P - P'$, $c(P) = 2XP - (X^2-1)P'$
et $f = b \circ a - a \circ b$

1) Montrez que a est un endomorphisme de E.

Tournez la page S.V.P.

2) a) Déterminez la matrice A de a dans la base B_E de E.
b) Déterminez le rang de la matrice de A.

3) a) L'endomorphisme de a est-il bijectif ? Justifiez.
b) Déterminez Ker(a) et Im(a).

4) Montrez que b est un endomorphisme de E. Justifiez.

5) a) Montrez que b est bijectif. Justifiez.
b) Montrez que pour tout Q de E, on a : $b^{-1}(Q) = Q$ + Q' +Q''.

6) a) Montrez que b admet une valeur propre et une seule et déterminez celle-ci.
b) B la matrice de b dans la base B_E de E est-elle diagonalisable ? Justifiez.

7) Montrez que c est un endomorphisme de E.

8) Déterminez la matrice C de c dans la base B_E de E.

9) L'endomorphisme c est-il bijectif ? Justifiez.

10) La matrice C est-elle diagonalisable ? Justifiez.

11) Calculez f (P).

12) Montrez que $(BA - AB)^3 = 0$.

EXERCICE N° 3

Soit E^3 un espace affine de dimension 3, qui est aussi euclidien ; on considère f : $E^3 \to E^3$ telle que l'on a : $f(x, y, z) = (x', y', z')$ et

$$x' = y + 1$$
$$y' = z - 2$$
$$z' = x + 3$$

1) Quelle est la nature de f ?

2) Donnez son axe si c'est une rotation ou un vissage.

On considère g : $E^3 \to E^3$ définie par $g(x, y, z) = (x', y', z')$ où

$$\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = z + 3 \\ z' = x - 2 \end{cases}$$

3) Quelle est la nature de g ?

4) Donnez son axe si c'est une rotation ou un vissage.

EXERCICE N° 4

Soit $I =]1, +\infty[$. On désigne par *f* l'application de I dans $\mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in I$ par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{(t-1)^2} dt \quad .$$

On ne cherchera pas à exprimer *f* à l'aide de fonctions usuelles.

1) Déterminez le signe de *f(x)*.

2) Justifiez la dérivabilité de *f* sur *I*, et calculez *f'(x)* pour tout $x \in I$, on exprimera *f'(x)* de la manière la plus simple possible.

3) a) Montrez que pour tout $t \in I$,

$$t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t - 1$$

On pourra utiliser la formule de Taylor Lagrange entre 1 et t.

b) Déduisez l'existence et la valeur de la limite de *f(x)* pour *x* tendant vers 1 et *x>1*.