

**CONCOURS EXTERNE POUR L'ACCÈS AU GRADE
D'INSPECTEUR DES FINANCES PUBLIQUES**

ANNÉE 2019

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2

Durée : 3 heures - Coefficient : 5

Économétrie et statistiques

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

Recommandations importantes

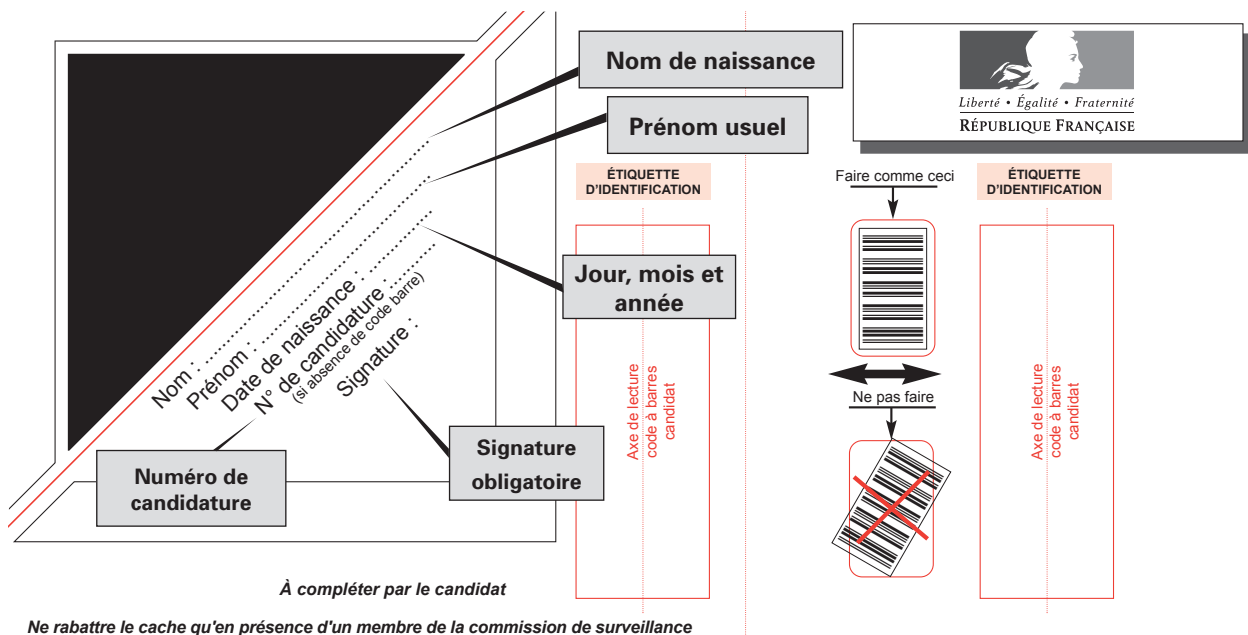
Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.

Sous peine d'annulation de sa copie, le candidat ne doit porter aucun signe distinctif (nom, prénom, signature, numéro de candidature, etc.) en dehors du volet rabattable d'en-tête.

Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.



Le candidat devra compléter l'intérieur du volet rabattable des informations demandées et se conformer aux instructions données



Concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel ⁽¹⁾
 (1) Rayer les mentions inutiles

Externe

Pour l'emploi de : **Inspecteur des Finances publiques**

Épreuve n° :

Matière : **027 – Économétrie et statistiques**

Date :

Nombre d'intercalaires supplémentaires :

Préciser éventuellement le nombre d'intercalaires supplémentaires

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement. Une autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Les étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

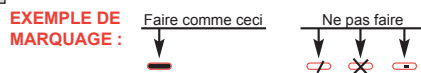
Suivre les instructions données pour les étiquettes d'identification

NOTE / 20
,

RÉSERVÉ À L'ADMINISTRATION

À L'ATTENTION DU CORRECTEUR

Pour remplir ce document :
 Utilisez un stylo ou une pointe feutre de couleur NOIRE ou BLEUE.



Pour porter votre note, cochez les gélules correspondantes.

Reportez la note dans les zones **NOTE / 20** et dans le cadre **A**

En cas d'erreur de codification dans le report des notes cochez la case **erreur** et reportez la note dans le cadre **B**.

Cadre A réservé à la notation				Cadre B réservé à la notation rectificative			
20	19	18		20	19	18	
17	16	15		17	16	15	
14	13	12		14	13	12	
11	10	09		11	10	09	
08	07	06		08	07	06	
05	04	03		05	04	03	
02	01	00		02	01	00	
Décimales				Décimales			
<input type="text" value=""/>	<input type="text" value=""/>	<input type="text" value=""/>	<input type="text" value=""/>	<input type="text" value=""/>	<input type="text" value=""/>	<input type="text" value=""/>	<input type="text" value=""/>
				Erreur			

NOTE / 20

EN AUCUN CAS, LE CANDIDAT NE FERMERA LE VOLET RABATTABLE AVANT D'Y AVOIR ÉTÉ AUTORISÉ PAR LA COMMISSION DE SURVEILLANCE

N°140 - IMPRIMERIE NATIONALE 2014.01.51061.P0 - Juin 2014 - 145.112

SUJET

ÉCONOMETRIE ET STATISTIQUES

Code matière : 027

Les candidats sont autorisés à utiliser les matériels suivants :

- les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;
- les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen » ;
- les règles graduées.

Sont interdits :

- les téléphones portables ainsi que les montres et/ou tout autres objets et accessoires connectés ;
- les règles de calcul, compas, équerres, rapporteurs et tables de logarithmes ;
- l'utilisation de tout autre document ou matériel autre que le matériel nécessaire pour composer.

Le candidat traitera obligatoirement les six exercices suivants.

EXERCICE N° 1

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes où X suit une loi du χ^2 à ν_1 degrés de liberté et Y suit une loi du χ^2 à ν_2 degrés de liberté.

Quelle est la loi de $Z = \frac{\nu_2 X}{\nu_1 Y}$?

EXERCICE N° 2

Un plateau d'assistance téléphonique cherche à étudier la durée, notée D, qui s'écoule entre deux appels d'une catégorie de clients. On suppose que D suit une loi exponentielle de paramètre θ admettant pour fonction de densité :

$$f_D(d, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{d}{\theta}}, \forall d \geq 0 .$$

Le plateau dispose d'un n-échantillon aléatoire $\{D_1, \dots, D_n\}$ indépendant et identiquement distribué de même loi que D. Il est admis que $E[D] = \theta$ et que $V(D) = \theta^2$.

θ est inconnu et nous cherchons à l'estimer par la méthode du maximum de vraisemblance.

1. En partant de la définition de la durée D, quelle contrainte doit vérifier le paramètre θ ?

Justifiez.

2. Montrez que la log-vraisemblance associée au n-échantillon $\{D_1, \dots, D_n\}$ s'écrit :

$$\ln L(D_1, \dots, D_n, \theta) = -n \ln(\theta) - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n D_i$$

3. Montrez que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ , qu'on notera $\hat{\theta}$, correspond à la moyenne empirique de l'échantillon.

4. Quel est son biais ? Est-il convergent ? Justifiez.

EXERCICE N° 3

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule de l'urne.

On note :

A : « Tirer une boule blanche ».

B : « Tirer une boule ni blanche ni rouge ».

C : « Tirer une boule noire ou une boule rouge ».

1. A et B sont-ils incompatibles ? Justifiez.

2. B et C sont-ils incompatibles ? Justifiez.

EXERCICE N° 4

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la distribution de probabilité conjointe est donnée par le tableau suivant :

Y \ X	-1	0	1
0	a	2a	a
1	3a/2	3a	b

1. Déterminez a et b tels que la loi de (X, Y) suive une loi conjointe.

2. On pose $Z = X + 2Y$ et $T = \max(X, Y)$.

Déterminez en fonction de a seulement, les lois de X, Z et T.

3. Calculez les espérances de X, Z et T.

4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Justifiez.

EXERCICE N° 5

On a mesuré la taille d'un groupe d'élèves en arrondissant les résultats à 5 cm :

Taille arrondie [cm]	155	160	165	170	175
Nombre d'élèves	6	9	5	3	1

Les résultats pourront être arrondis avec 2 décimales.

1. Quelles sont les : classes, fréquences, histogramme des fréquences, fréquences cumulées, courbe des fréquences cumulées, classe modale, moyenne arithmétique, médiane, étendue, variance, écart-type, premier quartile, troisième quartile, écart interquartile ?
2. Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminez l'intervalle qui contient plus de 80 % de l'effectif.
3. En comparant la moyenne et la médiane, que pouvez-vous dire de cette distribution ?
4. On compare la distribution précédente avec celle d'un autre groupe dont la moyenne et l'écart-type sont respectivement $m = 165$, $s^2 = 5.6$. Lequel est le plus homogène ?

EXERCICE N° 6

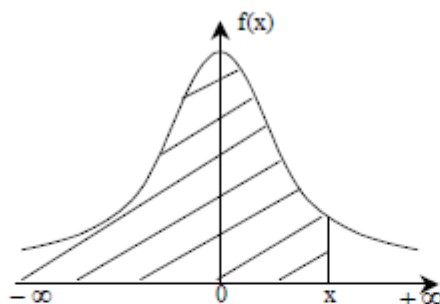
La notice technique d'une tablette informatique présente une autonomie de 4H30. Après demande d'informations, il s'avère que l'autonomie en minutes X est distribuée suivant une loi normale $N(270,30)$.

1. Donnez l'espérance et la variance de X .
2. Quelle est la probabilité que le téléphone fonctionne moins de 4 heures ?
3. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne plus de 5H30 ?
4. Après 1 an d'utilisation, on observe que, 1 fois sur 3, l'autonomie est inférieure à 4 heures. Si on suppose l'écart type inchangé (égal à 30 minutes), quelle est la nouvelle autonomie moyenne de fonctionnement ?

Ce sujet comporte une annexe d'une page.

Annexe – Table de la loi normale centrée réduite

Probabilité de trouver une valeur inférieure à x .



$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Table pour les grandes valeurs de x :

x	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8
F(x)	0,99885003	0,99931280	0,99966302	0,99984085	0,99992763	0,99996831	0,99998665	0,99999458	0,99999789	0,99999921

